EPFL

1. Généralités :

1.1 Equations de Maxwell :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

H = champ magnétique [A/m]

J = Densité de courant [A/m²]

D = Déplacement électrique $[C/m]$
(Milieu Diélectrique)

Négligeable si f ~~faible~~ faible < 100 kHz

Donc :

$$\vec{rot}\ \vec{H} = \vec{J}$$

$$\vec{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{div}\ \vec{B} = 0$$

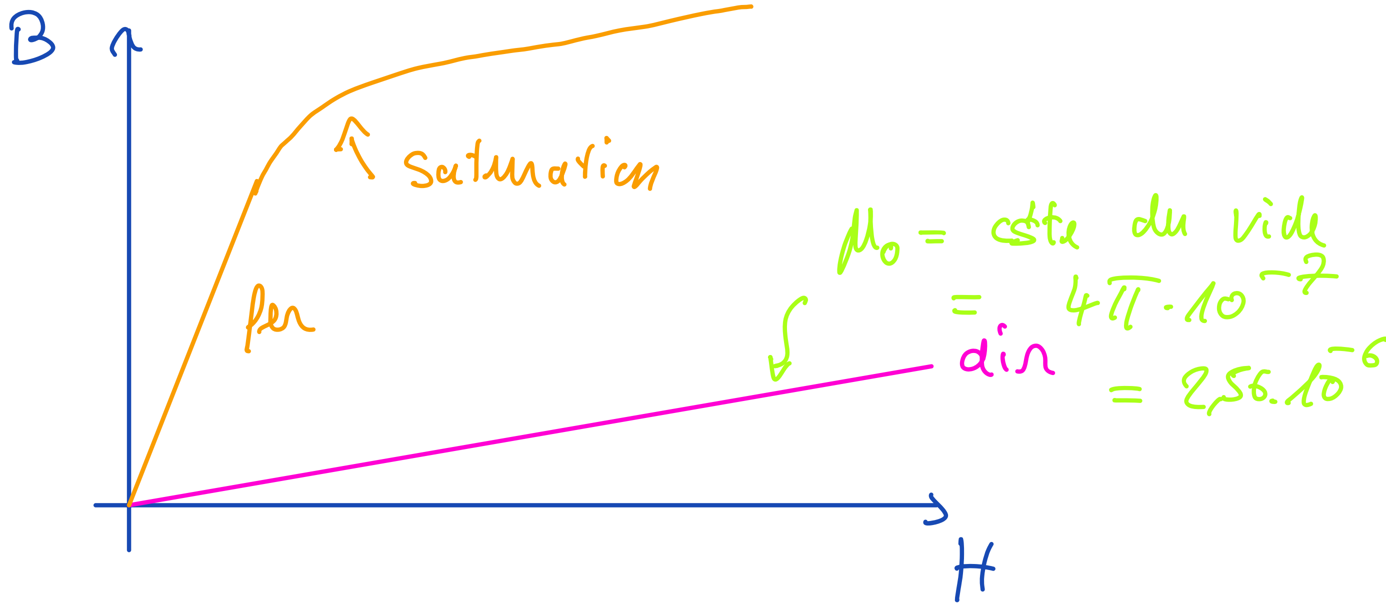
$$\vec{B} = \mu\ \vec{H}$$

B : Champ d'induction Magnétique $[T]$
(Flux density)

E : Champ électrique $[V/m]$

μ : perméabilité magnétique $\left[\frac{Vs}{Am}\right]$

↳ caractériser un bon ou mauvais conducteur magnétique.



$$\mu_{fer} \neq \mu_0 \quad [10 \ldots 10\,000\,\mu_0]$$

Démarche analytique :

a) Modèle de Maxwell :

→ Analyse $\vec{H} \rightarrow \vec{J} \rightarrow \vec{F}$

b) Modèle de Kirchhoff :

→ Analogie de circuit

→ $\vec{F}$

1.2 Analogie Electrique - Magnétique :

Electrique	Magnétique

Densité de courant j [A/m²]

$$i = \int_S j \, ds$$

Tension

$$u_{12} = \int_1^2 E \, dl$$

$$= \int_1^2 \rho \cdot j \, dl$$

résistivité Densité de courant

$$= \int_1^2 \frac{\rho \, j \cdot S}{S} \, dl$$

$$= i \underbrace{\int_1^2 \frac{\rho \cdot dl}{S}}_{\text{Résistance : } R_1}$$

$$u_{12} = i \cdot R_{12}$$

Densité de Flux : B [T]

$$\underset{\text{Flux}}{\Phi} = \int_S B \, ds \quad [Vs] \; [Wb]$$

Potentiel

Côté magnétique :

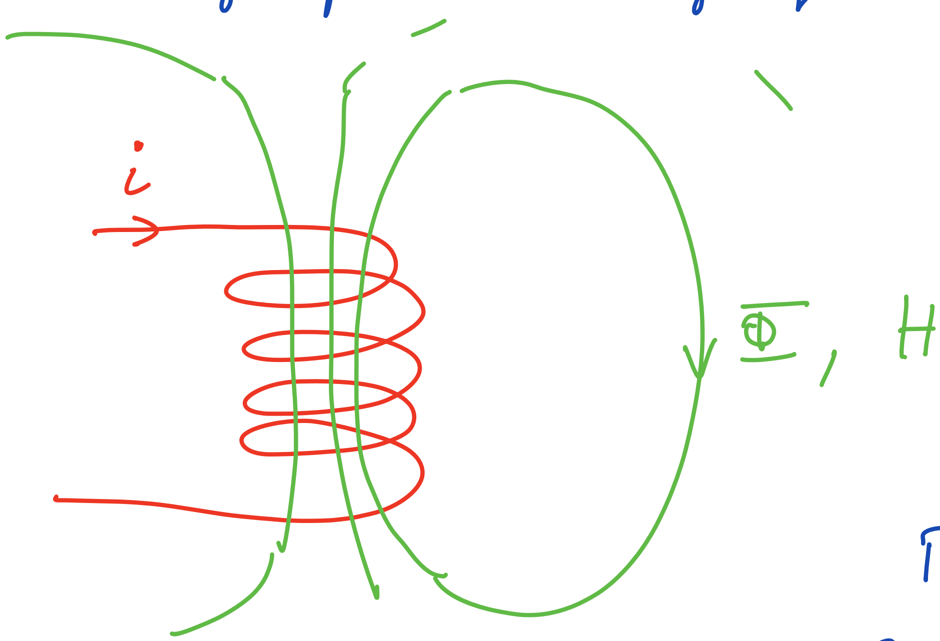
$$\vec{Rot}\ \vec{H} = \vec{J}$$

↓ 1 degré de liberté

Navier - Stokes

$$\underbrace{\oint H\,dl}_{\text{Pot. magnétique}} = \underbrace{\int_S j\,ds}_{\text{Pot magnétique}} = \Theta = N \cdot i$$

Potentiel magnétique [A]



$$B = \mu \cdot H$$

$$\Theta_{12} = \int_1^2 H\,dl = \int_1^2 \frac{B}{\mu}\,dl$$

2

2

$$= \int_1 \frac{B \cdot S}{\mu \cdot S}\, dl = \Phi \underbrace{\int_1 \frac{dl}{\mu \cdot S}}_{\text{Résistance Magnétique.}}$$

Définition: $R_m = \int_l \frac{dl}{\mu \cdot S}$

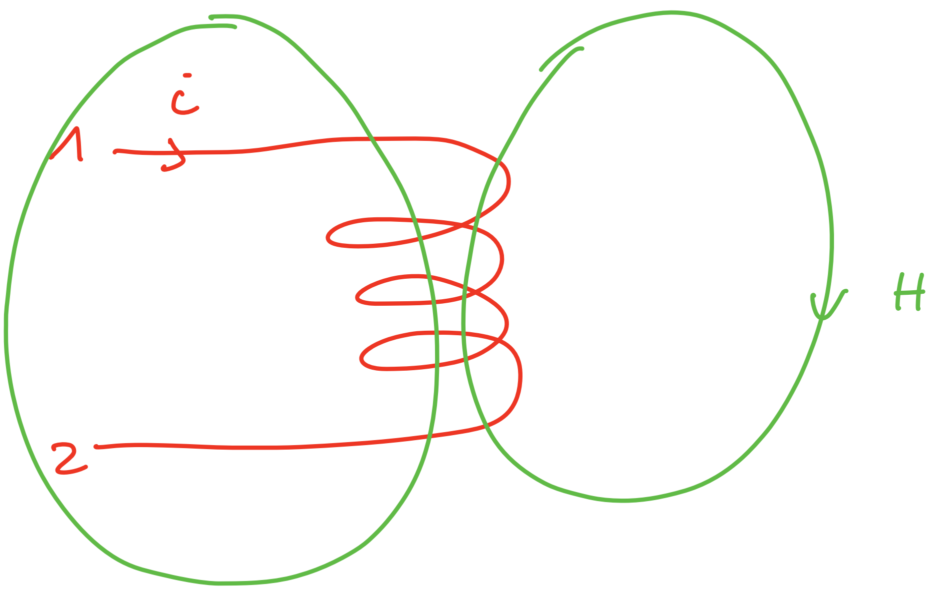
Réluctance

$$\Longrightarrow \quad \Theta_{12} = R_m \cdot \Phi \quad \text{(loi d'Ohm)}$$

$$0 < R_m < R_{max}$$

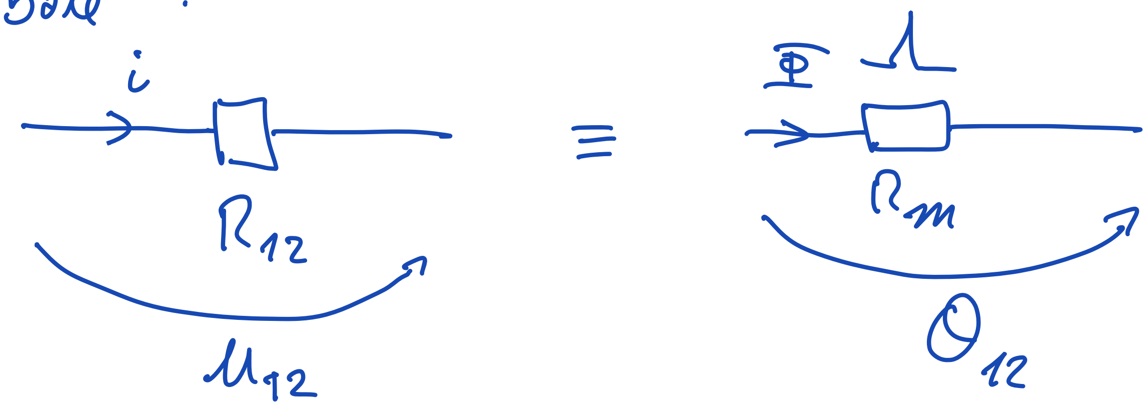
Définition : $\Lambda = \frac{1}{R_m} = \int_S \frac{\mu\, ds}{l}$

Permeance

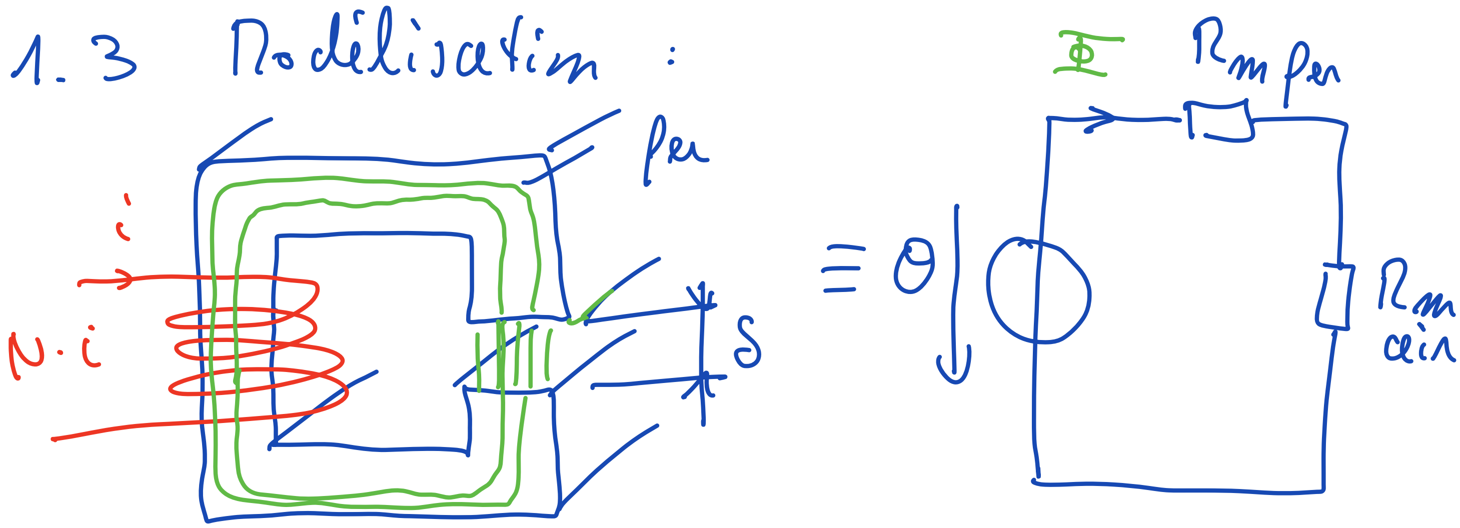


$$\Theta = N \cdot i = \int H\,dl = R_m \cdot \Phi$$

Symbole :



1.3 Modélisation :



Avantages : • On connaît la manière de résoudre

. Thévenin, Norton, λ - Δ

• Superposition ⚠ si linéaire !

1.4 Mise en série et // de perméances et réluctances

En série : $R_{m\,eq} = \sum R_m$

// $R_{m\,eq} = \dfrac{1}{\sum \frac{1}{R_m}}$

En série : $\Lambda_{eq} = \dfrac{1}{\sum \frac{1}{\Lambda}}$

// $\Lambda_{eq} = \sum \Lambda$

1.5 Résumé :

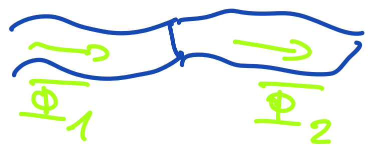
Electrique		Magnétique :	
R	$[\Omega]$	R_m	$[1/H]$
Y	$[1/\Omega]$	Λ	$[H]$
I	$[A]$	Φ	$[Vs, Wb]$
U	$[V]$	Θ	$[A]$

$U = R \cdot i$ $\qquad$ $\Theta = R_m \cdot \Phi$

J	$[A/m^2]$	B	$[T]\left[\frac{Vs}{m^2}\right]$
E	$[V/m]$	H	$[A/m]$

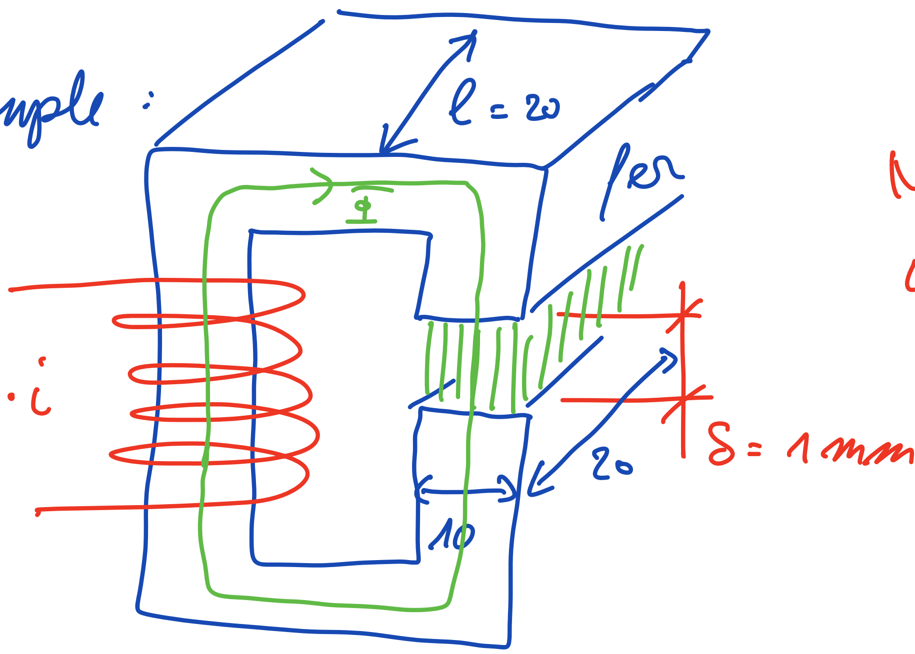
$\mathrm{div}\,\vec{J} = 0$ $\qquad$ $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

$i_1 = i_2$ $\qquad$ $\Phi_1 = \Phi_2$



$$U_{12} = \int_1^2 E\,dl \qquad \Theta_{12} = \int_1^2 H\,dl$$

Exemple :



$N = 200$

$i = 2\,A$

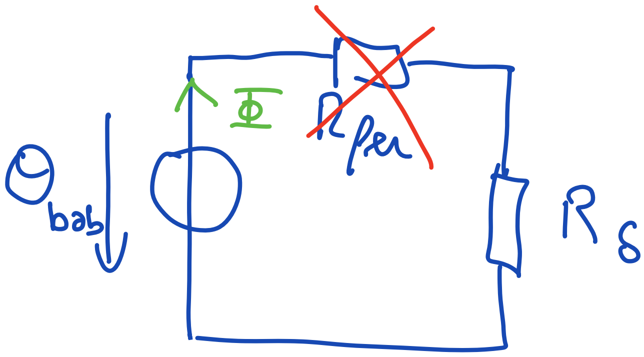
Φ_δ ? $\qquad$ B_δ ?

$B = \mu \cdot H$

Hypothèse : $\qquad \rightarrow H = \frac{B}{\mu}$

- fer est bon conducteur magnétique
- fer $\rightarrow \mu_{fer} \rightarrow \infty$
- lignes de champ $\perp$ à la surface

Schéma magnétique équivalent :



$$\Theta = R_\delta \cdot \Phi$$

$$\Theta \cdot \Lambda_\delta = \Phi$$

$$R_\delta = R_{air} = \int_l \frac{dl}{\mu \cdot S} = \frac{\delta}{\mu_0 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}$$

$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$

traversée par le flux donc $10 \cdot 20 \cdot mm^2$

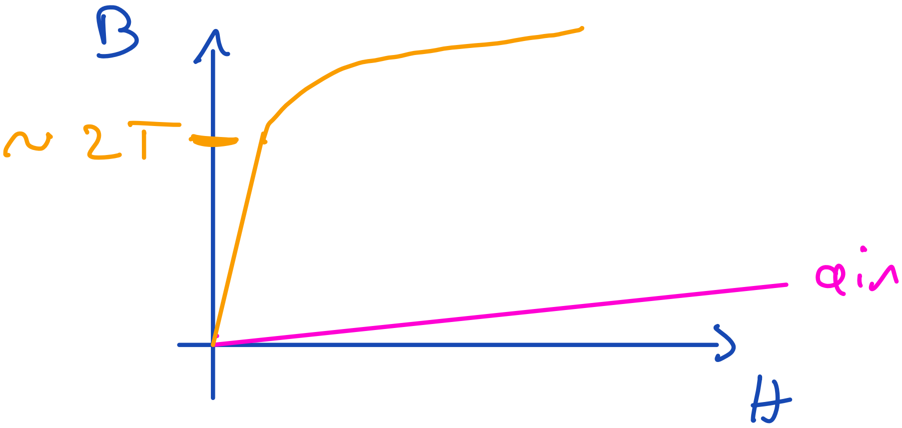
$$= \frac{1 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 3,98 \cdot 10^{6} \; [1/H]$$

$$\Lambda_\delta = \frac{1}{R_\delta} = 2,5 \cdot 10^{-7} \; [H]$$

$$\Phi_\delta = \Lambda \cdot \Theta = 2.5 \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 2$$

$$= 1 \cdot 10^{-4} \; [Vs, Wb]$$

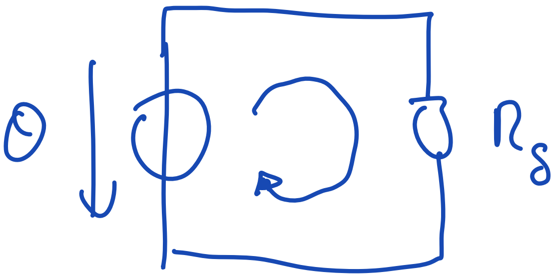
$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 0,5 \; [T]$$



Si $\mu_{fer} \to \infty$

$\to H_{fer} \to 0$

Autre méthode :



$$\oint H \, dl = \Theta = N \cdot i$$

$$H_\delta \cdot \delta = N \cdot i$$

$$\frac{B_\delta}{\mu_0} \to \frac{B_\delta}{\mu_0} \cdot \delta = N \cdot i$$

$$B_\delta = \frac{N \cdot i \cdot \mu_0}{\delta}$$

$$= 0{,}5 \text{ T}$$

1.6 Définition du Flux totalisé :

$$\vec{Rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

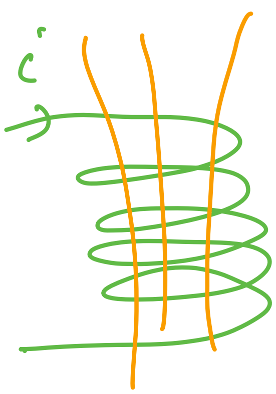
N.S. 1 degré de liberté

$$\oint E\,dl = \int_S -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$$

Si le système est indéformable :

$$\oint E\,dl = \int_S -\frac{dB}{dt} \cdot ds$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_S B \cdot ds$$



$$= -\frac{d\,(N \cdot \Phi)}{dt}$$

N : nb de spires de la bobine.

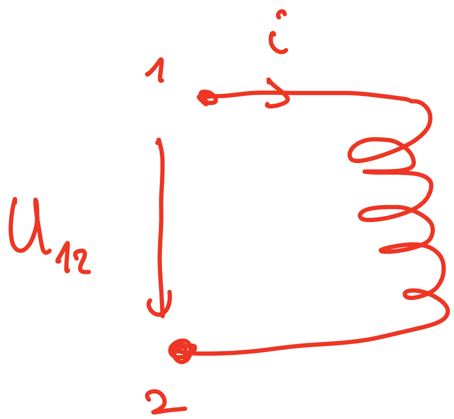
Φ : Flux magnétique

Définition : $N \cdot \Phi$ = Flux totalisé

$= \psi$ (Psi)

$$\oint E\,dl = -\frac{d\psi}{dt}$$

1.7 Loi de la tension induite :



$$\oint E\,dl = \int_1^2 E\,dl + \int_2^1 E\,dl$$

$$= \int_1^2 \rho \cdot j\,dl - u_{12}$$

$$= R_{12} \cdot i - U_{12} = -\frac{d\psi}{dt}$$

$$\boxed{U_{12} = R_{12} \cdot i + \frac{d\psi}{dt}}$$

Expérience : bob 2 est ouvert :

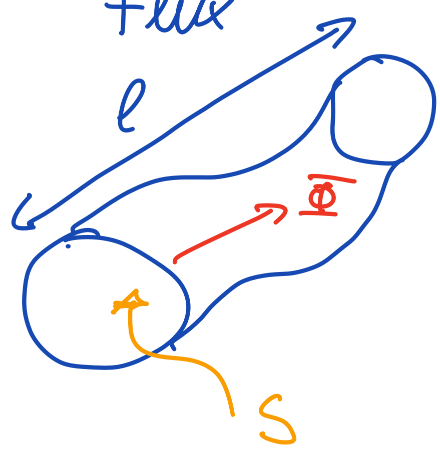
$$U_2 = 0 + \frac{d\Psi}{dt}$$

Rappel :

Loi d'Ohm magnétique :

$$\Theta = R_m \cdot \Phi$$

Potentiel — Réluctance — Flux



$$R_m = \frac{\ell}{\mu \cdot S}$$

μ : Perméabilité magnétique

$$\Lambda = \text{Perméance} = \frac{1}{R_m}$$

Modélisation : Kirchhoff

Loi de tension induite :

$$u = R \cdot i + \frac{d\psi}{dt}$$

$\psi = N \cdot \Phi$ (Flux totalisé)

c'est le flux vu d'une bobine.

1.8 Définition de l'inductance :

$$\psi = N \cdot \Phi$$

$$\Phi = \Lambda \Theta = \Lambda N \cdot i$$

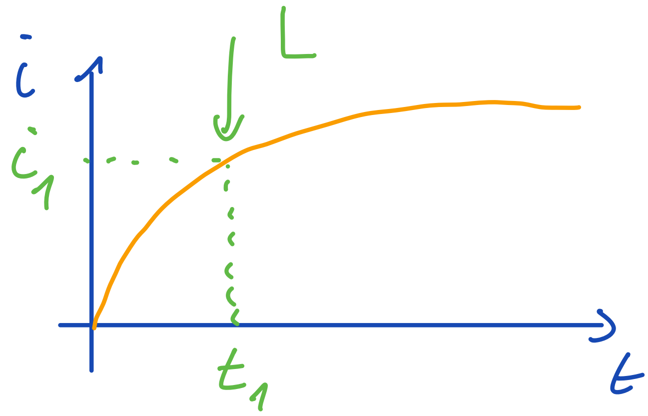
$$\psi = \underbrace{N^2 \Lambda}_{L} \cdot i = L \cdot i$$

L Inductance [H]

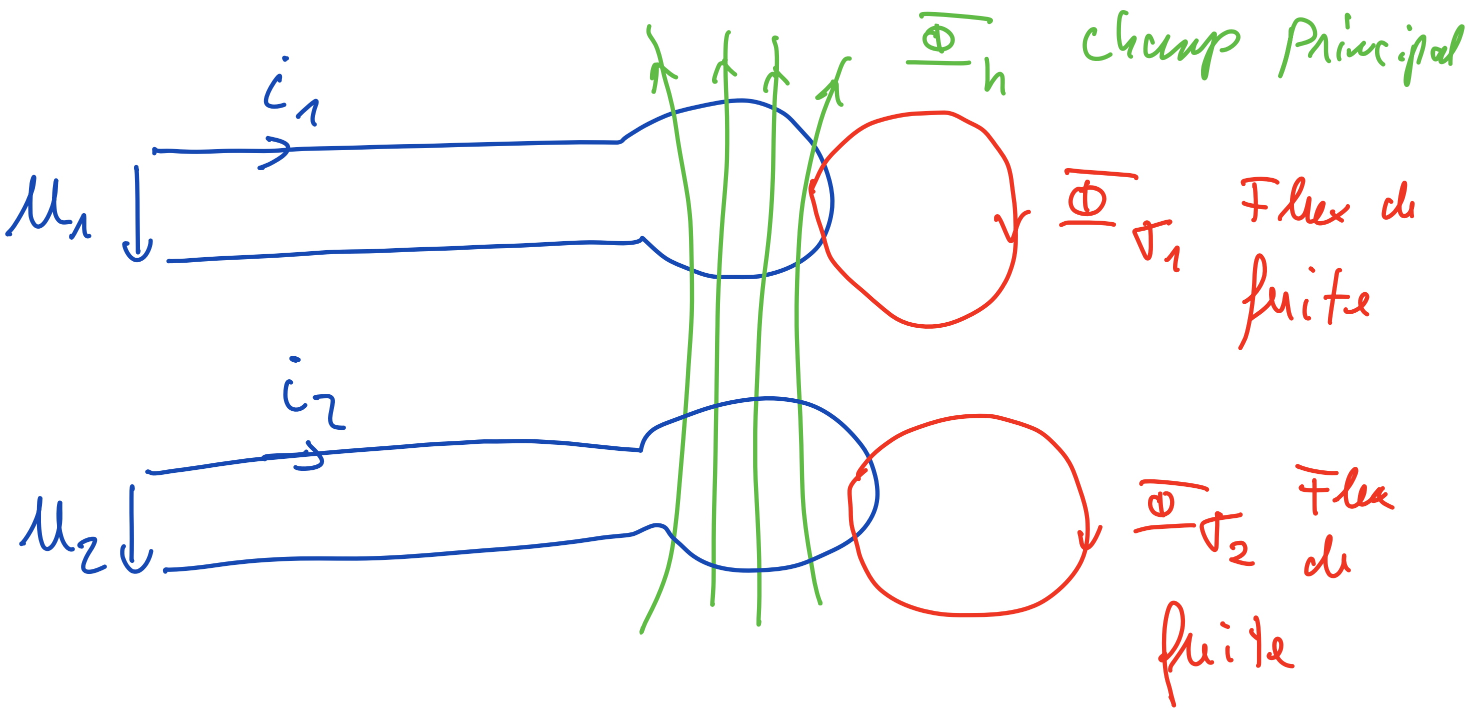
Rappel : $\Lambda = \dfrac{\mu \cdot S}{\ell}$

L cste

$$u = R \cdot i + \frac{d\psi}{dt} \overset{\downarrow}{=} R \cdot i + L \frac{di}{dt}$$



1.9 Inductance Propre et Mutuelle :



$$u_1 = R_1 \cdot i_1 + \frac{d\psi_1}{dt}$$

$$u_2 = R_2 \cdot i_2 + \frac{d\psi_2}{dt}$$

$$\Psi_1 = N_1 \cdot \Phi_1 = N_1 \left(\Phi_h + \Phi_{\sigma_1} \right)$$

$$\Psi_2 = N_2 \cdot \Phi_2 = N_2 \left(\Phi_h + \Phi_{\sigma_2} \right)$$

$$\Phi_{\sigma_1} = \Theta_1 \cdot \Lambda_{\sigma_1} = \Lambda_{\sigma_1} \cdot N_1 \cdot i_1$$

$$\Phi_{\sigma_2} = \Theta_2 \cdot \Lambda_{\sigma_2} = \Lambda_{\sigma_2} \cdot N_2 \cdot i_2$$

$$\Phi_h = \Lambda_h \left(\theta_1 + \theta_2 \right)$$

$$= \Lambda_h \left(N_1 \cdot i_1 + N_2 \cdot i_2 \right)$$

Cas particulier : $i_1 \neq 0$

$i_2 = 0$ (circuit ouvert)

Φ_{σ_1} et $\Phi_{\sigma_2} = 0$

$$u_2 = \cancel{R_2 \, i_2} + \frac{d\Psi_2}{dt} = \frac{d\Psi_2}{dt}$$

$$\Psi_2 = N_2 \cdot \Phi_2 = N_2 \cdot \Phi_h$$

$$= N_1 \cdot N_2 \cdot \Lambda_h \cdot i_1$$

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = \underbrace{N_1 \cdot N_2 \cdot \Lambda_h}_{\text{Inductance mutuelle}} \frac{di_1}{dt}$$

Flux créé par 1 passe dans 2

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1}$$

Cas général :

$$\psi_1 = N_1 \left(\Phi_h + \Phi_{\sigma 1} \right) = N_1 \left(\Lambda_h \left(\theta_1 + \theta_2 \right) + \Lambda_{\sigma_1} \cdot \theta_1 \right)$$

$$\theta_1 = N_1 \cdot i_1$$

$$\theta_2 = N_2 \cdot i_2$$

$$\psi_1 = N_1^2 \Lambda_{\sigma_1} i_1 + N_1^2 \Lambda_h \cdot i_1 + N_1 N_2 \Lambda_h i_2$$

$$= \underbrace{N_1^2 \left[\Lambda_h + \Lambda_{\sigma_1} \right]}_{L \text{ propre}} i_1 + \underbrace{N_1 N_2 \Lambda_h}_{L \text{ mutuelle}} i_2$$

L_{11} $\qquad\qquad$ L_{12}

ψ_{11} Flux totalisé créé par 1 qui passe dans 1

ψ_{21} Flux totalisé créé par 2 qui passe dans 1

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} = R_1 \cdot i_1 + L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = R_2 \cdot i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} = R_2 \cdot i_2 + L_{22}\frac{di_2}{dt} + L_{12}\frac{di_1}{dt}$$